

*В.В. Бернацек, Й.З. Піскозуб*  
Українська академія друкарства

## МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ЯВИЩ ПРОЦЕСУ КАШИРУВАННЯ

*Наведено дослідження внутрішніх напружень в системі "картон-клей-мікрогофрокартон" при кашируванні та опис їх аналітичними залежностями.*

*An investigation of internal stress in the "cardboard-glue-micro corrugated cardboard" at masking their analytical description and dependencies.*

### Вступ

Картонні пакування, виготовлені за технологією каширування, суміщають в собі характеристики споживчого пакування (яскравий, барвистий зовнішній вигляд) і гофротари (міцність, надійність). Технологія каширування дозволяє покращити захисні функції пакування, роблячи її значно міцнішою і жорсткішою в порівнянні із споживчою, одночасно перетворюючи картонне пакування на справжній витвір мистецтва. [1, 2, 3]

### Постановка проблеми та результати досліджень

Вплив механічних чинників на гофрокартон у процесі каширування можна досліджувати з двох сторін:

1) Гофрокартон, як пружний шар товщиною  $2h$ , стискається із зусиллями  $P$  двома жорсткими циліндрами однакового радіусу  $R$  (рис.1).

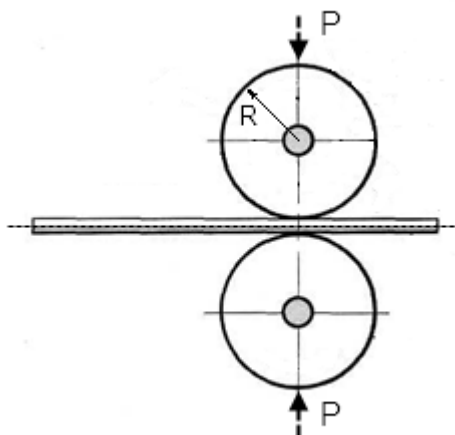


Рис.1.

Оскільки задача симетрична відносно недеформованої серединної площини гофрокартону, її можна замінити еквівалентною з точки зору напружено-деформованого стану двовимірною задачею про накочування жорсткого циліндра радіусу  $R$  на пружний шар товщини  $h$  на жорсткій основі (рис.2).

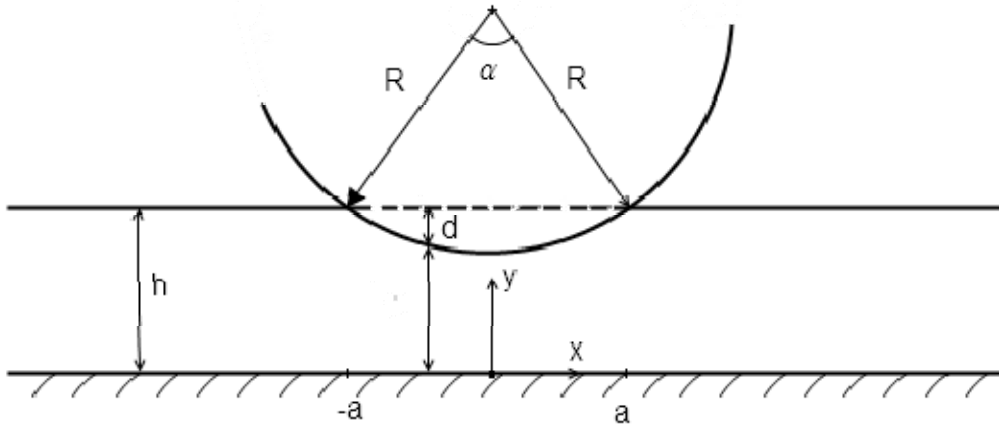


Рис.2.

У цьому випадку, враховуючи порожнисту будову гофрокартону і, як наслідок, практичну відсутність деформацій поверхні поза зоною контакту з циліндром, достатньо обмежитися теорією контакту тіл Герца [4, 5, 6]. В рамках цієї теорії найбільш адекватно описує пружне деформування гофрокартону при стисканні модель пружного шару Вінклера, яку ще іноді називають «пружинним матрацом» (рис.3).

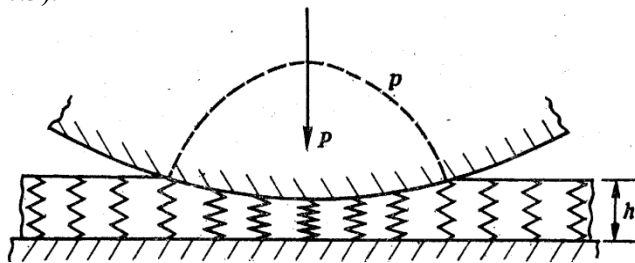


Рис.3.

Переміщення поверхні гофрокартону у цьому випадку (рис.3) описуються співвідношенням:

$$d(x) = \begin{cases} h - y = d_{\max} - R + \sqrt{R^2 - x^2}, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases} \quad (1)$$

де  $[-a, a]$  – довжина зони контакту,  $a = R \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{d_{\max}(2R - d_{\max})}$ ,  $d_{\max}$  – величина максимального прогину поверхні гофрокартону в т.  $X=0$ . Нормальний тиск в довільній точці контакту згідно з гіпотезою Вінклера визначається співвідношенням:

$$p(x) = -kd(x), \quad (2)$$

де  $k$  – приведений модуль пружності на стиск гофрокартону. Зрозуміло, що  $p_{\max} = -kd_{\max}$  в точці  $X=0$  не повинен перевищувати граничне значення тиску, при якому втрачаються пружні властивості матеріалу і починається незворотне змінання. Для матеріалу флютинга  $p_{\text{гран}}$  становить приблизно 120-450 кПа, а для

картону - 350-1050 кПа [Шредер, Пилипенко ]. Зусилля, що притискає циліндр до поверхні шару зрівноважується контактним тиском

$$P = - \int_{-a}^a p(x) dx = k \int_{-a}^a \left( d_{\max} - R + \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx \quad (3)$$

Враховуючи залежність (2), можна отримати співвідношення, що пов'язує погонне зусилля  $P$  з максимальним прогином  $d_{\max}$ , або з максимальним тиском  $P_{\max}$

$$\begin{aligned} P &= 2ak(d_{\max} - R) + ak\sqrt{R^2 - a^2} + kR^2 \arcsin \frac{a}{R} = ak(d_{\max} - R) + kR^2 \arcsin \frac{a}{R} = \\ &= k \left( \sqrt{d_{\max}(2R - d_{\max})} (d_{\max} - R) + R^2 \arcsin \frac{\sqrt{d_{\max}(2R - d_{\max})}}{R} \right) = \\ &= \frac{1}{k} \left( -\sqrt{-p_{\max}(p_{\max} + 2kR)} (kR + p_{\max}) + kR^2 \arcsin \frac{\sqrt{-p_{\max}(p_{\max} + 2kR)}}{kR} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

У табл.1 наведено розрахунок обезрозмірених погонного зусилля  $P/(kR^2)$ , максимальних прогину  $d_{\max}/R$  та тиску  $-p_{\max}/(kR)$  в залежності від обезрозміреного значення довжини зони контакту  $a/R$ . Фіг.9 містить зворотну залежність максимальних прогину  $d_{\max}/R$  та тиску  $-p_{\max}/(kR)$  та обезрозміреного значення довжини зони контакту  $a/R$  від безрозмірного погонного зусилля  $P/(kR^2)$ . Зазначимо, що значенням  $d_{\max}/R$  та  $-p_{\max}/(kR)$  у таблиці та рисунках відповідає одна і та ж лінія за рахунок способу обезрозмірення.

Таблиця 1

$a/R$	$d_{\max}/R$ або $-p_{\max}/(kR)$	$P/(kR^2)$
1	1	1,570796
0,9	0,56411	0,727469
0,8	0,4	0,447295
0,7	0,285857	0,275498
0,6	0,2	0,163501
0,5	0,133975	0,090586
0,4	0,083485	0,044911
0,3	0,046061	0,018511
0,2	0,020204	0,005399
0,1	0,005013	0,000669
0	0	0

Для реального використання мають зміст розрахунки при  $a/R \ll 1$ , бо випадки  $a/R \approx 1$ , а тим більше  $d_{\max}/R \approx 1$  відповідають зануренню циліндра в матеріал шару практично по саму вісь, що ні конструктивно, ні технологічно неможливо. Розрахунки були проведені у повному теоретично можливому діапазоні з метою верифікації розрахункових формул по граничних випадках.

2) З іншого боку (див. рис.4, вид А), деформування гофрокартону під час процесу каширування впливає на ширину смуги нанесення клейового шару.

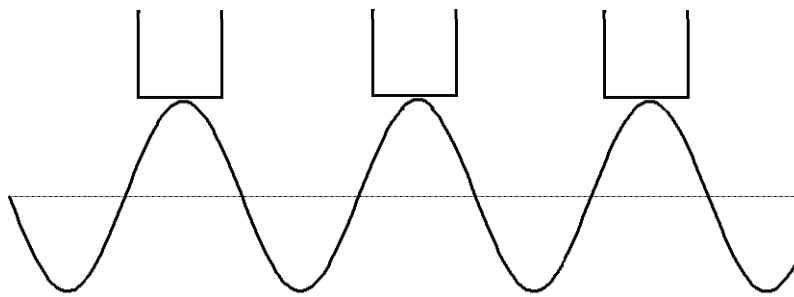


Рис.4

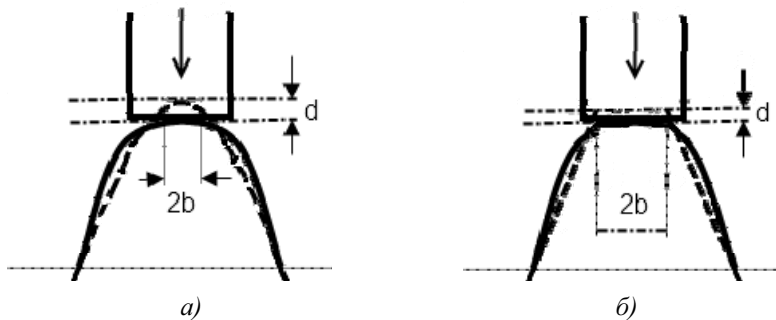


Рис.5

Якщо гофр має початкову синусовидну форму (рис.5), то ширина смуги  $2b$  зростає при збільшенні контактної тиску  $i$ , відповідно, прогину поверхні  $d$ . Це зростання обумовлене згинною деформацією форми гофру і обмежене лише втратою пружних властивостей при граничному прогині  $d_{\max}$ . Пружне деформування (стискання) трапецієвидної форми гофру (рис.5), на відміну від синусовидної, не змінює ширини смуги контакту. Пояснюється це тим, що трапеція є більш жорсткою і її деформування пов'язане в першу чергу з явищем втрати стійкості бічних сторін. Висновок: якщо виникає потреба регулювати ширину смуги контакту, то зручно вибирати форми гофру без кутових зламів у зоні контакту. Залежність ширини смуги контакту від прогину визначається у кожному конкретному випадку формою гофру. Для прикладу, розглянемо випадок півсферичної форми гофру (рис.6).

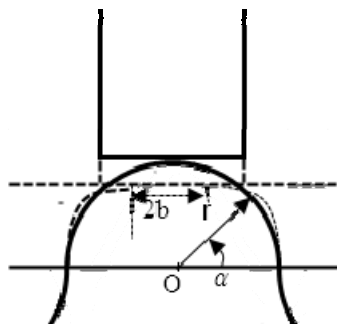


Рис.6

Враховуючи осьову симетричність задачі, розглянемо половину хвилі гофру, серединна лінія якої згинається під дією навантаження (рис.7)

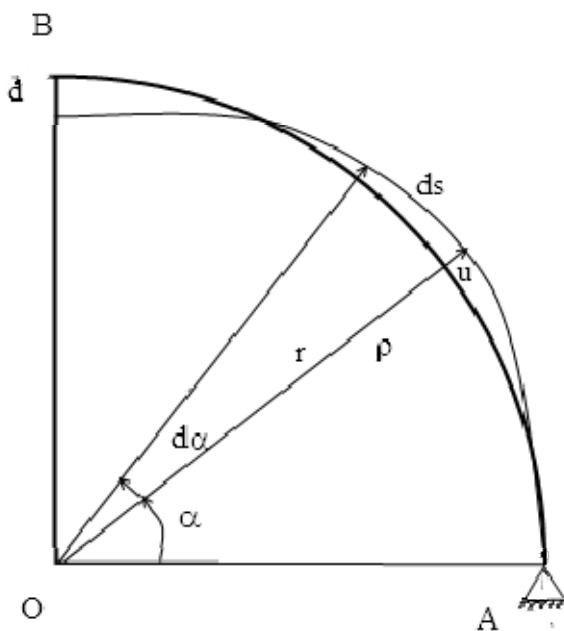


Рис.7

Для побудови математичної моделі згаданої задачі скористаємося теорією згину балок (стержнів), що найбільш адекватно відображає геометрію та параметри деформування хвилі гофру.

Якщо кривизна осьової лінії AB до деформування становила

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{r} \quad (5)$$

то після деформації, якщо скористатися полярними координатами  $\mathbf{R}, \alpha$ , де  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{u}$ , і підставити у відому формулу для кривизни.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R^2 + 2\left(\frac{dR}{d\alpha}\right)^2 - R \frac{d^2 R}{d\alpha^2}}{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\alpha}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (6)$$

Отримаємо після нехтування величинами вищого порядку малості вираз для кривизни

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} \left(1 + \frac{u}{r}\right) + \frac{d^2 u}{ds^2} \quad (7)$$

Підставляючи (7) в рівняння згину

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ} \quad (8)$$

отримуємо рівняння Бусінеска для визначення прогинів  $u$

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + u = \frac{Mr^2}{EJ} \quad (9)$$

Рівняння (9) легко інтегрується, і його загальний розв'язок має вигляд

$$u = \left( C_1 - \int \frac{Mr^2}{EJ} \sin \alpha d\alpha \right) \cos \alpha + \left( C_2 - \int \frac{Mr^2}{EJ} \cos \alpha d\alpha \right) \sin \alpha \quad (10)$$

Вважаючи згинну жорсткість гофру постійною для розв'язку задачі необхідно лише побудувати вираз для згинного моменту  $M$  у довільному перерізі гофру. Зручно розглядати ліву півхвилю (рис.8)

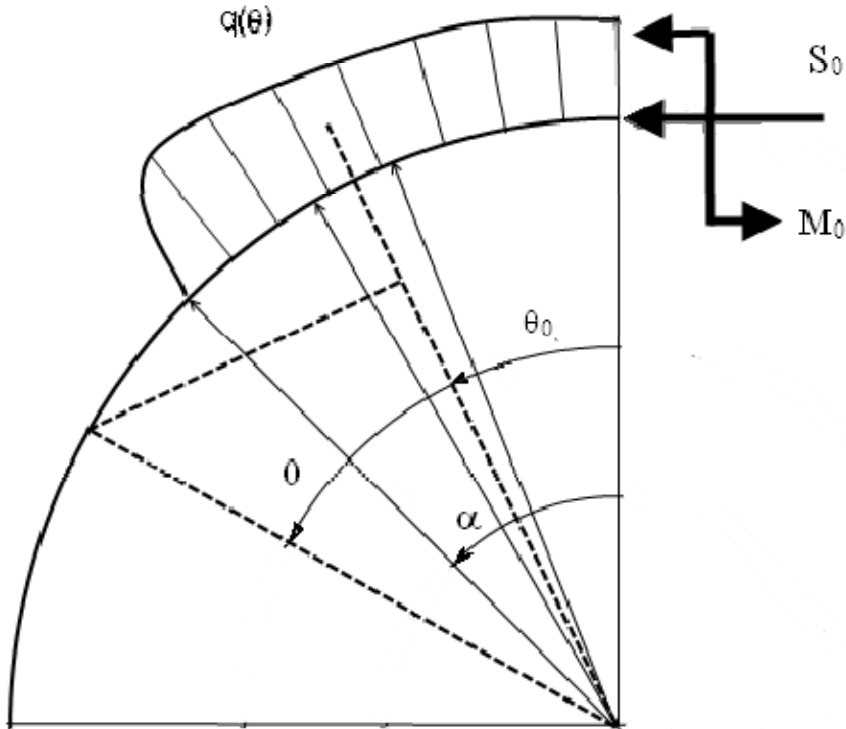


Рис.8

де  $M_0$  та  $S_0$  – згинний момент та сила, що заміняють дію правої півхвилі,  $q(\theta)$  – розподілене навантаження, породжене тиском циліндра на ділянці контакту  $[\theta, \alpha]$ . Тоді вираз для згинного моменту у довільній точці  $\theta$  має вигляд:

$$M(\theta) = -M_0 - S_0 r (1 - \cos \theta) + \begin{cases} r^2 \int_0^{\theta} q(\theta_0) \sin(\theta - \theta_0) d\theta_0, \text{ нпу } \theta \leq \alpha \\ r^2 \int_0^{\alpha} q(\theta_0) \sin(\theta - \theta_0) d\theta_0, \text{ нпу } \theta \geq \alpha \end{cases} \quad (11)$$

Підставляючи (11) у (10), отримуємо:

для  $\theta < \alpha$

$$\frac{EJ}{r^2}u = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta - M_0 - S_0 r \left(1 - \frac{\theta}{2} \sin \theta\right) + r^2 \int_0^\theta q(\theta_0) \sin(\theta - \theta_0) d\theta_0 \quad (12)$$

вирази для  $\frac{du}{d\theta}$  та  $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ :

$$\frac{EJ}{r^2} \frac{du}{d\theta} = -C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta + \frac{S_0 r}{2} (\sin \theta + \theta \cos \theta),$$

$$\frac{EJ}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta + \frac{S_0 r}{2} (2 \sin \theta - \theta \sin \theta) \quad (13)$$

для  $\theta \geq \alpha$

$$\frac{EJ}{r^2}u = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta - M_0 - S_0 r \left(1 - \frac{\theta}{2} \sin \theta\right) + \frac{r^2}{2} \int_0^\alpha q(\theta_0) [\sin \theta \cos \theta_0 - \theta \cos(\theta - \theta_0)] d\theta_0 \quad (14)$$

вирази для  $\frac{du}{d\theta}$  та  $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ :

$$\frac{EJ}{r^2} \frac{du}{d\theta} = -C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta + \frac{S_0 r}{2} (\sin \theta + \theta \cos \theta) - \frac{r^2}{2} \int_0^\alpha q(\theta_0) [\sin \theta \sin \theta_0 - \theta \sin(\theta - \theta_0)] d\theta_0,$$

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} = & -C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta + \frac{S_0 r}{2} (2 \sin \theta - \theta \sin \theta) - \\ & - \frac{r^2}{2} \int_0^\alpha q(\theta_0) [\sin \theta \cos \theta_0 - 2 \sin(\theta - \theta_0) - \theta \cos(\theta - \theta_0)] d\theta_0 \end{aligned} \quad (15)$$

При обчисленні інтегралів використано інтегрування по частинах, зміна порядку інтегрування та значення інтегралів.

В отриманих виразах (14), (15) є невідомими  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $M_0$ ,  $S_0$  та розподіл  $q(\theta)$ , які будемо визначати з граничних умов:

$$\text{при } \theta=0 \text{ повинна виконуватися геометрична умова } \frac{du}{d\theta} = 0 \quad ; \quad (16)$$

при  $\theta \in [0; \alpha]$  задаємо умову контакту, що викликає задане переміщення

$$u = r - \frac{r-d}{\cos \theta} \quad (17)$$

де  $\alpha$  – кінець зони контакту рівний  $\arccos \frac{r-d}{d}$ ;

$d$  – заданий прогин (див. рис.7, 8);

$$\text{при } \theta=\alpha \text{ має виконуватися умова } u(\alpha) = 0 \quad ; \quad (18)$$

при  $\theta=\pi/2$  – умови шарнірного закріплення

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{EJ}{r^2} \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (19)$$

З умови (16) відразу отримуємо  $C_2 = \theta$ . Підставляючи (12)-(15) в умови (18), (19), отримуємо

$$\begin{aligned} M_0 + S_0 r &= Q_c(\alpha) \\ M_0 + S_0 r &= C_1 - \frac{EJ}{r^2} d \\ -(M_0 + S_0 r) + \frac{\pi}{4} S_0 r + \frac{Q_c(\alpha)}{2} - \frac{\pi}{4} Q_s(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} C_1 &= Q_c(\alpha) + \frac{EJ}{r^2} d \\ S_0 r &= \frac{2}{\pi} Q_c(\alpha) + Q_s(\alpha) \\ M_0 &= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) Q_c(\alpha) - Q_s(\alpha) \end{aligned} \quad (20)$$

Тут для зручності введено позначення

$$Q_c(\alpha) = r^2 \int_0^\alpha q(\theta_0) \cos \theta_0 d\theta_0; \quad Q_s(\alpha) = r^2 \int_0^\alpha q(\theta_0) \sin \theta_0 d\theta_0 \quad (21)$$

Загальний розв'язок для прогинів  $u$  тепер можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^2} u &= Q_c(\alpha) \left( \cos \theta - 1 + \frac{\theta}{\pi} \sin \theta \right) + \frac{EJd}{r^2} \cos \theta + \frac{Q_s(\alpha)}{2} \theta \sin \theta + r^2 \int_0^\theta q(\theta_0) \sin(\theta - \theta_0) d\theta_0, & \theta \leq \alpha \\ \frac{EJ}{r^2} u &= Q_c(\alpha) \left( \cos \theta - 1 + \frac{\theta}{\pi} \sin \theta + \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) + \frac{EJd}{r^2} \cos \theta, & \theta \geq \alpha \end{aligned} \quad (22)$$

Вимагаючи виконання умови (18), з (22) можна визначити постійні  $Q_c(\alpha)$ ,  $Q_s(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} Q_c(\alpha) &= \frac{EJd}{r^2} \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha - \frac{\alpha}{\pi} \sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha} \\ Q_s(\alpha) &= Q_c(\alpha) \frac{\sin \alpha + \alpha \cos \alpha}{2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha} \end{aligned} \quad (23)$$

де  $\alpha = \arccos \frac{r-d}{d}$  - постійна, залежна від початкового прогину  $d$ .

В результаті невідомим залишився лише розподіл контактного тиску  $q(\theta)$ , шукати який можна різними шляхами, вимагаючи лише виконання умови контакту (17). Перспективними є як розвинення  $q(\theta)$  в ряд по степенях  $\theta$  або по  $\cos(n\theta)$ ,  $\sin(n\theta)$  так і сплайн-апроксимація. Проте ці шляхи приведуть до громіздких обчислювальних процедур, пов'язаних із розв'язуванням систем лінійних алгебраїчних рівнянь, дослідженням точності отриманого наближеного розв'язку тощо. Більш логічним видається припущення, що величини  $Q_c(\theta)$ ,  $Q_s(\theta)$

$$Q_c(\theta) = r^2 \int_0^\theta q(\theta_0) \cos \theta_0 d\theta_0; \quad Q_s(\theta) = r^2 \int_0^\theta q(\theta_0) \sin \theta_0 d\theta_0 \quad (24)$$



змінюються тотожно до  $Q_c(\alpha)$ ,  $Q_s(\alpha)$ , співпадаючи з ними в т.  $\theta=\alpha$  та задовільняючи всі часткові випадки для  $\theta$  і тому

$$Q_c(\theta) = \frac{EJd}{r^2} \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta - \frac{\theta}{\pi} \sin \theta - \frac{\sin \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \cos \theta} \quad (25)$$

$$Q_s(\theta) = Q_c(\theta) \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{2 \cos \theta - \theta \sin \theta}$$

Тоді після деяких перетворень отримуємо

$$r^2 \int_0^\theta q(\theta_0) \sin(\theta - \theta_0) d\theta_0 = Q_c(\theta) \sin \theta - Q_s(\theta) \cos \theta \quad (26)$$

і (22) остаточно приймає вигляд

$$\frac{EJ}{r^2} u = Q_c(\alpha) \left( \cos \theta - 1 + \frac{\theta}{\pi} \sin \theta \right) + \frac{EJd}{r^2} \cos \theta + \frac{Q_s(\alpha)}{2} \theta \sin \theta + Q_c(\theta) \sin \theta - Q_s(\theta) \cos \theta, \quad \theta \leq \alpha$$

$$\frac{EJ}{r^2} u = Q_c(\alpha) \left( \cos \theta - 1 + \frac{\theta}{\pi} \sin \theta + \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) + \frac{EJd}{r^2} \cos \theta, \quad \theta \geq \alpha$$

Розрахунок безрозмірного прогину  $\tilde{u} = \frac{u}{r}$  в залежності від безрозмірної величини  $\tilde{d} = \frac{d}{r}$  та кута  $\theta$  в декартових координатах приведено на рис.9.

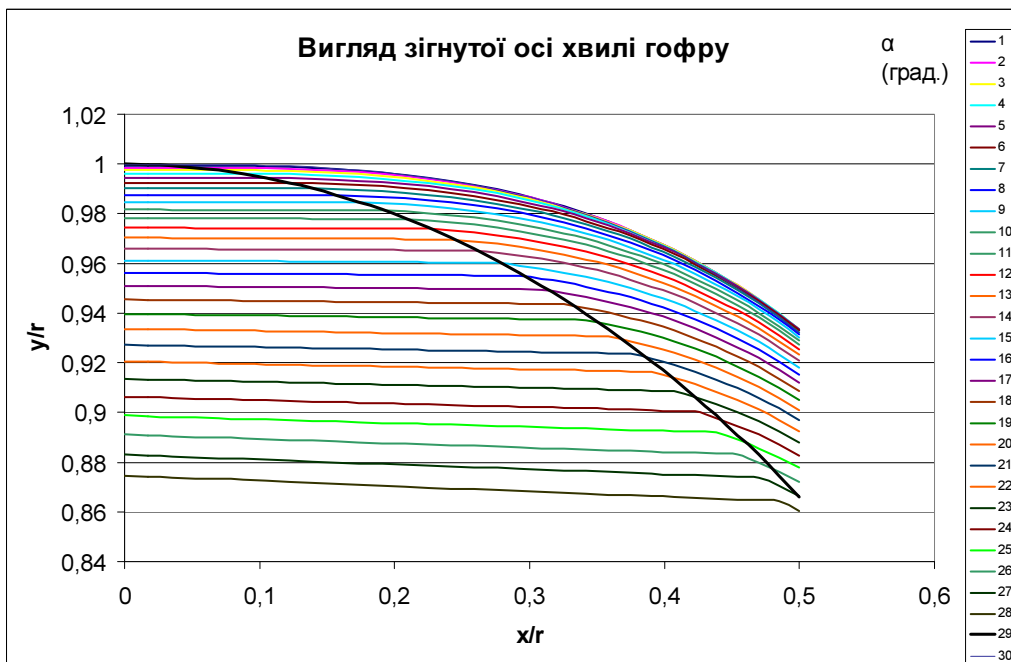


Рис.9

### Висновок

Як бачимо, значення  $\alpha$  більші від  $30^\circ$  є перебільшенням, оскільки це відповідає величинам  $d$  більшим за 14% від  $r$ , що переходить межі застосовності теорії балок. Для ілюстрації поведінки хвилі гофру при деформуванні ці значення показують

тенденцію і є корисними. Тому для якісного проведення процесу каширування мікрогофрокартону важливо здійснити моделювання можливих деформаційних явищ, які виникають внаслідок внутрішніх напружень між елементами системи “картон-клей-мікрогофрокартон” та механізмами каширувального пристрою і описати їх аналітичними залежностями.

1. Бернацек В.В. Дослідження фізико-механічних властивостей кашированого мікрогофрокартону / Бернацек В.В. // Квалілогія книги. – 2007. – С.17-24. – (№1(11)).

2. Бернацек В.В. Технологічні системи нанесення клею при кашируванні гофрокартону / Бернацек В.В. // Друкарство молоде. Доповіді 7-ої міжнародної конференції студентів і аспірантів. – Київ – 2007. – С. 105-106.

3. Бернацек В.В. Дослідження системи „папір-клей-картон” в процесі каширування / Бернацек В.В. // Квалілогія книги. – 2010. – С.64-66. – (№2(18)).

4. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. - 1962. - №1. - С.131-137

5. Штаерман И.Я. К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел // Докл. АН СССР. - 1939. - 25, ' 5. - С. 360-362.

6. Hertz Н. Ueber die Berührung fester elastischer Körper // J. reine angew. Math. - 1882. -92. - S. 156-171.