УДК 539. 3

ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ В ПОЛОГИХ ОБОЛОНКАХ ШАРУВАТОЇ СТРУКТУРИ

У. В. Жидик[1], В. М. Флячок[2]

[1]Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013 , Україна,

[2]Українська академія друкарства, вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

Для неоднорідних анізотропних пологих оболонок двоякої кривини записано двовимірні диференціальні рівняння теплопереносу з відповідними крайовими умовами. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для скінченної ортогонально армованої пологої оболонки за локального нагріву. Числові результати наведено для сферичної та циліндричної оболонок з графітоепоксидного композиту.

Ключові слова: *теплопровідність, шаруваті оболонки, теплообмін.*

Постановка проблеми. Багатошарові тонкостінні оболонкові конструкції широко використовують у різних галузях техніки, зокрема і в поліграфії. Багатошаровість таких конструкцій використовується для захисту від агресивного середовища, для зміцнення конструкції, теплоізоляції або інтенсифікації передачі тепла. Наприклад, один з шарів конструкції з низькими теплофізичними властивостями можна використовувати як підкладку для затримання тепла. За умов нерівномірного нагріву в конструкціях утворюються температурні поля, які спричиняють руйнівні напруження. Тому формулювання і розроблення методів розв'язування крайових задач теплопровідності для багатошарових тонкостінних конструкцій є актуальною науковою та практичною задачею.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Щоб одержати рівняння для тонкостінних конструкцій потрібно тривимірну задачу теплопровідності звести до двовимірної задачі. Це можна зробити різними методами, наприклад, методом усереднення чи операторним методом. Для однорідних ізотропних оболонок ці методи використано в роботі [1], для ортотропних оболонок — в [2, 3]. Дослідженню температурних полів в оболонках з криволінійною анізотропією присвячена робота [4]. У статті [5] виведені рівняння теплопровідності для багатошарових анізотропних оболонок з врахуванням неідеального теплового контакту між шарами.

Мета статті — дослідити розподіл температурного поля в багатошарових ортогонально армованих пологих оболонках регулярної структури за умов локального нагріву.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо неоднорідну за товщиною анізотропну прямокутну в плані з розмірами $a_1 \times a_2$ пологу оболонку з двоякою сталою кривиною k_1, k_2 і сталою товщиною $2h$. Точки простору оболонки віднесемо до прямокутної декартової системи координат x_1, x_2, z з початком в серединній поверхні і координатою z по товщині.

Нехай оболонка нагрівається джерелами тепла і зовнішнім середовищем шляхом конвективного теплообміну через бокові поверхні $z = \pm h$. Розподіл температурного поля в такій оболонці будемо описувати двовимірними диференціальними рівняннями теплопровідності, які виведено в припущенні про лінійний розподіл температури по товщині [6].

$$P_{11}^t T_1 + P_{12}^t T_2 + \frac{2k_0}{h}\lambda_{33}^{(1)} T_2 - C^{(1)}\dot{T}_1 - C^{(2)}\dot{T}_2 = f_1 - W_1^t,$$

$$P_{12}^t T_1 + P_{22}^t T_2 - \frac{\lambda_{33}^{(1)}}{h^2} T_2 + \frac{2k_0}{h}\lambda_{33}^{(2)} T_2 - C^{(2)}\dot{T}_1 - C^{(3)}\dot{T}_2 = f_2 - W_2^t, \qquad (1)$$

де $\lambda_{ij}^{(k)}, C^{(k)}, W_k^t$ — інтегральні характеристики коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_{ij}(z)$, теплоємності $c_e(z)$ і джерел тепла w_t, відповідно; k_0 — середня кривина; P_{ij}^t — диференціальні оператори другого порядку; крапка над функцією позначає частинну похідну за часом τ; функції f_1, f_2 залежать від граничних умов на поверхнях $z = \pm h$ і для конвективного теплообміну мають вигляд

$$f_1 = \left(T_1 - t_1^c\right)\varepsilon_1^t + \left(T_2 - t_2^c\right)\varepsilon_2^t; \quad f_2 = \left(T_2 - t_2^c\right)\varepsilon_1^t + \left(T_1 - t_1^c\right)\varepsilon_2^t,$$

де $\varepsilon_i^t = \alpha_3^+ - (-1)^i \alpha_3^-$; $t_i^c = \frac{1}{2}\left(t_c^+ - (-1)^i t_c^-\right)$; $\alpha_3^\pm$ — коефіцієнти тепловіддачі з повер-

[illegible] $t_c^{\pm}$

Для однозначності розв'язку рівнянь (1) задамо такі граничні і початкові умови:

$$\text{при } x_1 = 0 \text{ і } x_1 = a_1 - T_1 = T_2 = 0; \qquad (2)$$

$$\text{при } x_2 = 0 \text{ і } x_2 = a_2 - T_1 = T_2 = 0; \qquad (3)$$

$$\text{при } \tau = 0 - T_1 = T_1^0 \text{ і } T_2 = T_2^0. \qquad (4)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь теплопровідності (1) відповідно до температурних граничних умов (2), (3) і початкових умов (4) знаходимо методом скінчених перетворень Фур'є за координатами x_1, x_2 й інтегрального перетворення Лапласа за часом τ. В результаті для трансформант T_{1mn}, T_{2mn} маємо такі формули:

$$T_{1mn} = \frac{Bi}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\{Q_{mn} G_j Z_j(\tau) + K_j e^{-p_j\tau} T_{1mn}^0 + g_{2mn} e^{-p_j\tau} T_{2mn}^0\right\} \Big/ \left(p_j - p_k\right),$$

$$T_{2mn} = \frac{Bi}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\{Q_{mn} H_j Z_j(\tau) + R_j e^{-p_j\tau} T_{2mn}^0 + g_{3mn} e^{-p_j\tau} T_{1mn}^0\right\} \Big/ \left(p_j - p_k\right), \ (k = 1,2;\ k \neq j).$$

Тут

$$\left\{Q_{mn}; T_{imn}^0\right\} = \frac{4}{a_1 a_2}\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\left\{t_c(x_1, x_2); T_i^0(x_1, x_2)\right\}\sin\frac{m\pi x_1}{a_1}\sin\frac{n\pi x_2}{a_2}dx_1 dx_2;\ Z_j(\tau) = \int_0^{\tau'} t^+(v) e^{-p_j(\tau' - v)} dv;$$

інші позначення наведені в роботі [6].

Розглянемо приклад, коли температура довкілля дорівнює нулю, а температурне поле в початковий момент рівномірно розподілене по площі $2a_1^0 \times 2a_2^0$ з центром у точці x_1^0, x_2^0. Тоді

$$T_1^0(x_1,x_2)=T^*N\left(x_1\right)N\left(x_2\right);\ T_2^0(x_1,x_2)=0,$$

$$T_{1mn}^0=\frac{16T^*}{mn\pi^2}\sin\frac{\pi m x_1^0}{a_1}\sin\frac{\pi n x_2^0}{a_2}\sin\frac{\pi m a_1^0}{a_1}\sin\frac{\pi n a_2^0}{a_2},$$

де $N\left(x_i\right)=S_-\left(x_i-\left(x_i^0-a_i^0\right)\right)-S_+\left(x_i-\left(x_i^0+a_i^0\right)\right),\left(i=1,2\right)$.

Числові дослідження проводились для квадратної в плані сферичної оболонки (рис. 1) і циліндричної оболонки (рис. 2). При цьому розглядалися тришарові оболонки типу $\left(0^\circ/90^\circ/0^\circ\right)$ і $\left(90^\circ/0^\circ/90^\circ\right)$. За матеріал кожного шару оболонки взято графітоепоксидний композит армований волокнами. Для обчислень використовувалися такі значення параметрів $\lambda_{22}=\lambda_{33}=0.5\lambda_{11}$, $a_1^0/a_1=a_2^0/a_2=0.125$, $x_1^0/a_1=x_2^0/a_2=0.5$, $h/a_1=0.05$, $Bi=1$. На рисунках показано зміну безрозмірної середньої температури $T_1'=T_1/T^*$ залежно від безрозмірної координати $x_2'=x_2/a_2$. Суцільні лінії відповідають оболонці типу $\left(0^\circ/90^\circ/0^\circ\right)$, а штрихові – $\left(90^\circ/0^\circ/90^\circ\right)$.

Аналіз числових результатів і наведені рисунки дозволяють оцінити значення максимально можливої температури вздовж координати x_2 залежно від типу оболонки, структури шароватості та різних моментів часу.

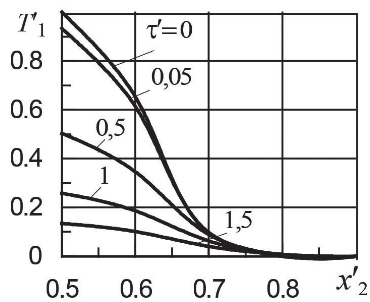

Рис. 1. Зміна температури вздовж сферичної оболонки в різні моменти часу

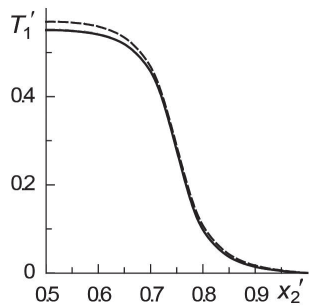

Рис. 2. Зміна температури вздовж циліндричної оболонки для різних структур

Висновки. На основі виведених двовимірних диференціальних рівнянь побудовано розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для пологих оболонок двоякої кривини. Результати досліджень можуть бути використані для оцінки температурних полів в композитних оболонках шаруватої структури, в однорідних анізотропних оболонках та в оболонках з односторонніми та двосторонніми покривами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка, 1978. 344 с.
2. Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А. Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций. Мат. методы и физ-мех. поля. 1975. Вып. 2. С. 54–59.
3. Шевченко В. П., Гольцев А. С. Термоупругий изгиб локально нагретых ортотропных оболочек. Прикл. механика. 2007. Т. 43, № 3. С. 80–85.
4. Padovan J. Temperature distributions in anisotropic shells of revolution. AIAA Journal. 1972. V.10, No.1. PP. 60–64.
5. Флячок В. М. Рівняння нестаціонарних температурних полів для багатошарових анізотропних оболонок з урахуванням теплової інерції . Доп. НАУ. Сер. Механіка. 2000. № 2. С. 60–63.
6. Жидик У. В. Динамічна задача термопружності для неоднорідної анізотропної пологої оболонки. Машинознавство. 2008. № 4 (130). С. 15–21.

TEMPERATURE FIELDS IN SHALLOW SHELLS OF LAYERED STRUCTURE

U. V. Zhydyk[1] ,V. M. Flyachok[2]

[1]National University "Lviv Polytechnic",
12 St. Bandera St., Lviv, 79013, Ukraine

[2]Ukrainian Academy of Printing,
19 Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine

For heterogeneous anisotropic doubly curved shallow shells, the two-dimensional differential equations of heat conduction with appropriate boundary conditions have been written down. By the integral Fourier and Laplace transformations, the solution to the non-stationary problem of heat conduction for finite cross-ply laminates shallow shell under local heating has been obtained. Numerical results for spherical and cylindrical shells of graphite-epoxide composite have been presented.

Keywords*: heat conduction, layered shells, heat transfer.*

Стаття надійшла до редакції 00.00.2018.