УДК 539. 3

ТЕРМОПРУЖНИЙ ЗГИН ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН СИМЕТРИЧНОЇ СТРУКТУРИ

У. В. Жидик[1], В. М. Флячок[2]

[1]Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013 , Україна,

[2]Українська академія друкарства, вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

Для анізотропних ортогонально-армованих шаруватих прямокутних пластин симетричної структури записано нестаціонарні рівняння термопружності та теплопровідності з відповідними крайовими умовами. Методами інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа побудовано замкнутий розв'язок вихідних диференціальних рівнянь для шарнірно опертих пластинок за умов рівномірного нагріву. Числові результати наведено для графітоепоксидного композиту.

***Ключові слова:** теплопровідність, термопружність, шаруваті пластини, теплообмін.*

Постановка проблеми. Пластинчаті шаруваті конструкції є основним елементом сучасних друкарських форм. Верхні шари виготовляються з полімерних матеріалів, які за своїми властивостями є анізотропними. У процесі експлуатації ці конструкції зазнають впливу силових та температурних дій, що може призвести до перерозподілу напружень і, як наслідок, до руйнування їх через розшарування. Тому дослідження напружено-деформованого стану шаруватих пластинчатих конструкцій є важливою інженерною проблемою.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Більшість досліджень напруженого стану пластинок стосувалися однорідних конструкцій із традиційних матеріалів [1–3], а анізотропні конструкції розглядалися під дією лише силових факторів [4–6]. Широке використання сучасних композитних матеріалів з високою міцністю і великими потенціальними можливостями щодо зменшення ваги конструкцій потребує проведення відповідних досліджень на базі рівнянь неоднорідних анізотропних пластин [7–9].

Мета статті — дослідити напружено-деформований стан шаруватої пластини симетричної структури, яка взаємодіє з навколишнім середовищем через конвективний теплообмін. Водночас використовується математична модель, яка враховує всі фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу [7, 8].

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо прямокутну з розмірами $a_1 \times a_2$ пластинку зі сталою товщиною $2h$, складену зі скінченої кількості жорстко з'єднаних між собою шарів однакової товщини. Шари перехресно армовані волокнами, напрям яких збігається з осями пластинки. Шари розміщені симетрично відносно серединної поверхні. Точки простору пластинки належать до декартової системи координат x_1, x_2, z. Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1, 2, 3. Кома перед індексами 1, 2 позначатиме частинні похідні за координатами x_1, x_2 відповідно, а крапка над функцією — похідну за часом τ.

Нехай пластинка нагрівається довкіллям у спосіб конвективного теплообміну через поверхні $z = \pm h$. Поверхня $z = +h$ нагрівається довкіллям з температурою $t_c^+(x_1, x_2, \tau) = t_c(x_1, x_2) t^+(\tau)$, а поверхня $z = -h$ — нульовою температурою $t_c^- = 0$. Коефіцієнти тепловіддачі з обох поверхонь вважаємо рівними між собою $\alpha^+ = \alpha^-$. Поверхневих сил і джерел тепла немає.

Згинну поведінку такої пластини дослідимо на основі двовимірних рівнянь термопружності у переміщеннях [8]:

$$\begin{gathered} k'A_{55}w_{,11} + k'A_{44}w_{,22} + k'A_{55}\gamma_{1,1} + k'A_{44}\gamma_{2,2} = I_1\ddot{w}, \\ -k'A_{55}w_{,1} + D_{11}\gamma_{1,11} + D_{66}\gamma_{1,22} - k'A_{55}\gamma_1 + (D_{12} + D_{66})\gamma_{2,12} = I_3\ddot{\gamma}_1 + D_{11}^t / h T_{2,1}, \\ -k'A_{44}w_{,2} + D_{22}\gamma_{2,22} + D_{66}\gamma_{2,11} - k'A_{44}\gamma_2 + (D_{12} + D_{66})\gamma_{1,12} = I_3\ddot{\gamma}_2 + D_{22}^t / h T_{2,2}, \end{gathered} \tag{1}$$

де A_{ij} і D_{ij} – інтегральні характеристики відповідно мембранної і згинної жорсткостей; I_1, I_3 — моменти інерції; D_{ii}^t — інтегральні характеристики терможорсткості; T_2 — температурний градієнт; w — прогин пластини; γ_1, γ_2 — кути повороту нормалі; k' — коефіцієнт зсуву.

Температурний градієнт T_2, що входить у систему (1), знаходимо з двовимірного рівняння теплопровідності [8]:

$$\lambda_{11}^{(3)} T_{2,11} + \lambda_{22}^{(3)} T_{2,22} - \lambda_{33}^{(1)} / h^2 \, T_2 - C^{(3)} \dot{T}_2 - \varepsilon_1^t T_2 = -\frac{1}{2} \alpha^+ t_c^+, \tag{2}$$

де $\lambda_{ii}^{(k)}$ і $C^{(3)}$ — інтегральні характеристики коефіцієнтів теплопровідності і теплоємності.

Рівняння теплопровідності (2) разом з рівняннями руху (1) складають математичну модель для дослідження температурних напружень шаруватих анізотропних пластин симетричної структури.

Для знаходження однозначного розв'язку цих рівнянь потрібно задати відповідні граничні та початкові умови. Нехай краї пластини шарнірно оперті та підтримуються за нульової температури. Тоді граничні умови мають вигляд:

при $x_1 = 0$ і $x_1 = a_1$: $w = \gamma_2 = M_{11} = 0$, $T_2 = 0$;

при $x_2 = 0$ і $x_2 = a_2$: $w = \gamma_1 = M_{22} = 0$, $T_2 = 0$.

Задамо також однорідні механічні та температурні початкові умови:

$$\begin{gathered} w(x_1, x_2, 0) = \dot{w}(x_1, x_2, 0) = 0, \; \gamma_1(x_1, x_2, 0) = \dot{\gamma}_1(x_1, x_2, 0) = 0, \\ \gamma_2(x_1, x_2, 0) = \dot{\gamma}_2(x_1, x_2, 0) = 0, \; T_2(x_1, x_2, 0) = 0. \end{gathered}$$

Задані граничні та початкові умови рівняння (1) і (2) розв'язуємо методом скінчених інтегральних перетворень Фур'є за координатами x_1, x_2 і Лапласа за часом τ. У результаті одержимо такі розв'язки:

$$w(x_1,x_2,\tau)=\sum_m\sum_n\sum_{j=1}^{3}\frac{\sin\mu_m x_1\sin\beta_n x_2}{\omega_j\prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{3}\left(\omega_s^2-\omega_j^2\right)}\times$$

$$\times\int_0^{\tau}\left[Q_3(\omega_j)T_{1mn}(u)+Q_3^*(\omega_j)T_{2mn}(u)\right]\sin\omega_j(\tau-u)\,du;$$

$$T_2(x_1,x_2,\tau)=\sum_m\sum_n\frac{3}{2}Bi\cdot Q_{mn}\cdot PG(\tau)\sin\mu_m x_1\sin\beta_n x_2,$$

де $Q_{mn}=\dfrac{4}{a_1a_2}\int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2}t_c(x_1,x_2)\sin\mu_m x_1\sin\beta_n x_2\,dx_1dx_2;PG(\tau)=\int\limits_0^{\tau}t^+(u)e^{-G_{mn}(\tau-u)}du;\mu_m=\dfrac{\pi m}{a_1}$; $\beta_n=\dfrac{\pi n}{a_2}$; Q_3,Q_3^*,G_{mn} — відомі многочлени; B — критерій Біо (безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі); ω_j — власні частоти.

Для проведення числових досліджень будемо вважати, що температура довкілля рівномірно розподілена на поверхні пластинки $t_c(x_1,x_2)=t^*$. У цьому випадку маємо $Q_{mn}=\dfrac{4t^*}{mn\pi^2}(1-\cos\pi m)(1-\cos\pi n)$.

Будемо також вважати, що температура довкілля раптово збільшується до значення t^*, залишаючись надалі сталою. Тоді $t^+(\tau)=t^*S_+(\tau)$ і

$$PG(\tau)=\frac{t^*}{G_{mn}}\left(1-e^{-G_{mn}\tau}\right)S_+(\tau).$$

Обчислення проводили для квадратної чотиришарової пластинки $\left(0/90^\circ/90^\circ/0\right)$. За матеріал кожного шару взято графітоепоксидний композит армований волокнами бору з такими фізико-механічними властивостями: $\nu_{21}=\nu_{31}=\nu_{23}=0,25$, $E_2=E_3=(0,1;\ 0,05)E_1, G_{23}=0.2E_3, G_{12}=G_{13}=0.5E_3, \lambda_{33}=0.5\lambda_{11}, \alpha_{22}^t=\alpha_{33}^t=(3;10)\alpha_{11}^t$. Інші параметри такі $h/a_1=0.05, Bi=1, k'=5/6$.

У таблиці наведені значення максимальних безрозмірних прогинів $\hat{w}=\dfrac{w}{h\alpha_{11}^t t^*}$, напружень $\hat{\sigma}_i=\dfrac{\sigma_i}{E_1\alpha_{11}^t t^*}$, зусиль $\hat{N}_i=\dfrac{N_i}{E_1h\alpha_{11}^t t^*}$ та моментів $\hat{M}_i=\dfrac{M_i}{E_1h^2\alpha_{11}^t t^*}$, обчислених в центрі пластинки, за різних відношень модулів пружності E_1/E_3 та коефіцієнтів лінійного теплового розширення $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t$.

Безрозмірні прогини та напруження для чотиришарової пластинки

$\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t$	3		10	
E_1/E_3	10	20	10	20
$\hat{w}$	1,791	1,681	3,362	2,654
$\hat{\sigma}_1$	0,0270	0,0195	0,294	0,172
$\hat{\sigma}_2$	-0,0943	-0,0482	-0,403	-0,212
$\hat{N}_2$	-0,0673	-0,0287	-0,109	-0,0392
$\hat{M}_1$	0,0296	0,0265	0,129	0,0477
$\hat{M}_2$	-0,0386	-0,0178	-0,151	-0,0282

Із аналізу числових результатів видно, що прогини шаруватих пластин більші, а напруження менші, ніж відповідні величини однорідних пластин, що є наслідком меншої ефективної жорсткості неоднорідних конструкцій. Величина цих відмінностей суттєво залежить від анізотропії матеріалу та кількості шарів в пластинці. Зі збільшенням відносного модуля пружності E_1/E_3 прогини та напруження зменшуються, а зі збільшенням відносного коефіцієнта лінійного розширення $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t$ вони зростають.

Висновки. У статті запропоновано математичну модель для дослідження динамічної поведінки шаруватих пластинок симетричної структури, які нагріваються довкіллям через конвективний теплообмін. Досліджено вплив неоднорідності, анізотропії, тепловіддачі та геометричних параметрів пластинки на її напружено-деформований стан.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Amrejcewicz J., Krysko V. A., Krysko A. V. Thermo-Dynamics of plates and shells (foundations of engineering mechanics). Berlin : Springer-Verlag, Heidelberg, 2010. 789 p.
2. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев : Наук. думка, 1978. 344 с.
3. Tauchert T. R. Thermal shock of orthotropic rectangular plates. J. Thermal Stresses. 1989. V. 12, No. 2. Pp. 241–258.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Москва : Наука, 1967. 268 с.
5. Алтухов Н. А. Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Москва : Машиностроение, 1984. 264 с.
6. Sun C. T., Whitney J. M. Dynamic response of laminated composite plates under initial stress. AIAA Journal. 1976. V.14. No. 2. Pp. 268–269.
7. Флячок В. М. Жидик У. В. Розрахунок шаруватих анізотропних пластинок на статичні та динамічні навантаження. Наукові записки. 2009 / 1 (15). С. 80–84.
8. Никилишин М. М., Жидик У. В. Дослідження термопружного стану неоднорідних анізотропних пластинок. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. Львів. 2006. Т. 1. С. 146–149.
9. Ahmed Amine Daikh, Abdelkader Megueni. Thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates. J. Thermal Stresses. 2018. V. 41, N 2. P. 139–159.

THERMOELASTIC BENDING OF LAMINATED ANISOTROPIC PLATES OF SYMMETRIC STRUCTURE

U. V. Zhydyk[1] ,V. M. Flyachok[2]

[1]National University “Lviv Polytechnic”,
12, St. Bandera St., Lviv, 79013, Ukraine

[2]Ukrainian Academy of Printing,
19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine

For anisotropic cross-ply laminated rectangular plates of symmetric structure, the nonstationary equations thermoelasticity and heat conduction with appropriate boundary conditions has been written down. By the integral Fourier and Laplace transformations, the closed form solutions of governing differential equations for simply supported plates subject to uniform heating has been obtained. Numerical results for graphite-epoxy composites have been presented.

Keywords: *heat conduction, thermoelasticity, laminated plates, heat transfer.*

Стаття надійшла до редакції 00.00.2018.